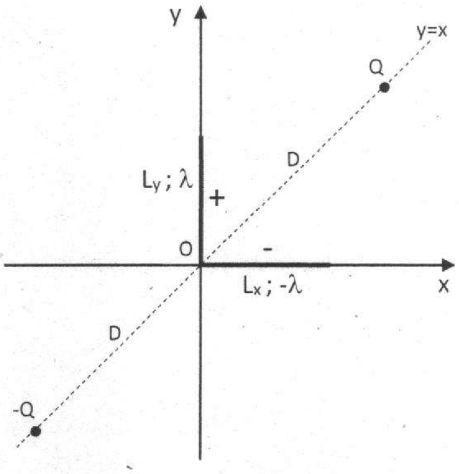
Prova scritta di Fisica 2 6.7.2017

Esercizio n.1 **[10 punti]**

In un sistema di riferimento (O,x,y,z) sono posti due segmenti isolanti di lunghezza $L_x = L_y = L$ rigidamente connessi tra loro e formanti un angolo di 90°, posti come in figura. I due segmenti sono caricati con due densità lineari di carica uguali e contrarie: $-\lambda$ su L_x e λ su L_y. Sulla retta y=x sono poste due cariche + Q e – Q ad una distanza **D>>L** dall'origine. Calcolare: A) il momento della forza – in modulo e in direzione – che agisce sul sistema [L_x,L_y]. B) Supponendo che il sistema [L_x , L_y] sia incernierato in O(0,0,0) e libero di ruotare nel piano x,y si chiede di determinare la sua posizione di equilibrio stabile, giustificando opportunamente la risposta.

Dati: ***$L= 10$ cm ; $\lambda = 1\mu C/m$; $Q = 1\mu C$; $D= 3$ m.***

Nota: Il disegno non è in scala.



Soluzione 1

Il sistema rigido [L_x , L_y] è equivalente ad un dipolo elettrico, quindi il problema può essere risolto scrivendo le interazioni fra il momento di dipolo ed il campo elettrico generato dalle due cariche ±Q. Le due cariche ±Q, è vero che sono equivalenti ad un dipolo, ma il campo che generano interessa la parte "dentro" il dipolo, al centro, quindi per queste due non si può utilizzare l'approssimazione di dipolo.

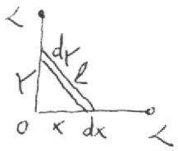
Il momento di dipolo di [L_x , L_y] va calcolato integrando i dipoli elementari di ogni coppia [$-\lambda dx$, in x ; λdy, in y]. Se si vuole scrivere il dipolo equivalente di carica totale $\pm\lambda L$, va scelta la distanza equivalente a cui metterle, giustificando la scelta.

Le relazioni che risolvono il problema sono:

Momento della forza sul dipolo: $\overline{M} = \overline{p} \times \overline{E}$ dove E è il campo totale generato dalle due cariche, uguale in modulo e direzione essendo le due cariche lontane ed i dipolo circa al centro delle due cariche.

Posizione di equilibrio: nella posizione per cui l'energia potenziale $U = -\overline{p} \cdot \overline{E}$ ha un minimo. Se si scrivesse che il momento della forza deve essere nullo si avrebbe sia la soluzione di equilibrio stabile che quella di equilibrio instabile.

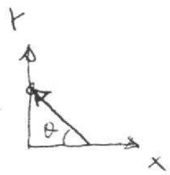
• Il momento di dipolo si può calcolare come somma dei momenti di dipolo elementari :



$dq = \begin{cases} \lambda dy \\ -\lambda dx \end{cases}$

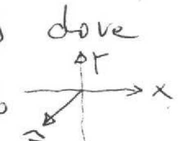
$dp = \ell \, dq \qquad \ell = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\, x$

$|p| = \int_0^L dp = \int_0^L \sqrt{2}\, x \cdot \lambda \, dx = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2} L^2$ con direzione $\theta = 45°$



• Il momento della Forza è $\overline{M} = \overline{p} \times \overline{E}(0)$ dove

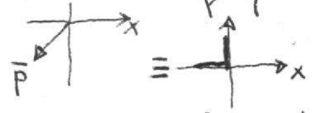
$\overline{E}(0) \cong \overline{E}(+Q) + \overline{E}(-Q) = \frac{2KQ}{D^2} \hat{E}$ essendo



quindi $\overline{M} = pE \,\mathrm{sen}\, \theta(\overline{p},\overline{E}) \hat{z} = pE\hat{z} = \frac{10^{-6}\sqrt{2}\; 10^{-2} \cancel{2} \cdot 9 \times 10^{9} \cdot 10^{-6}}{\cancel{2}\; 9}$

$= \lambda \sqrt{2} L^2 \cdot \frac{KQ}{D^2} \qquad = \sqrt{2} \cdot 10^{-5}\ N \cdot m$

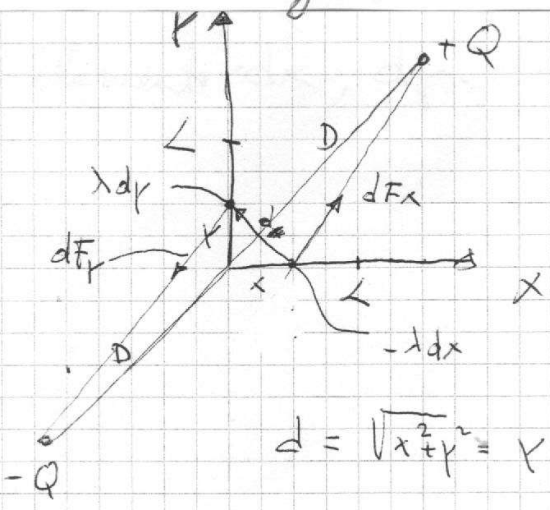
• La posizione di equilibrio stabile si ha quando l'energia potenziale U è minima: $U = -\bar{p}\cdot\bar{E} = -pE\cos\theta(p,E)$

$U_{min}(\theta = 0) \Rightarrow \bar{p} \,//\, \bar{E}$ 

Nota: $\bar{p}$ può essere calcolato anche da $\bar{p} = \int \bar{r}\, dq$ da cui si ha $\bar{p} = \frac{\lambda L^2}{2}(-\hat{x}+\hat{y})$ e $|\bar{p}| = \frac{\lambda L^2}{2}\sqrt{2}$ $\quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{p_y}{p_x} = 135°$

Soluzione 2

Calcolando direttamente il Momento elementare $d\bar{M}$ delle forze dovute a $\pm Q$ su ogni dx, dy



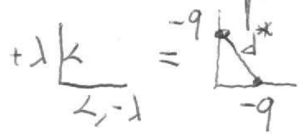
$\bar{M} = \bar{r}\times\bar{F}$

$dM(dF_x, dF_y) = \bar{d}\times d\bar{F}_y \simeq d\, dF_y\, \hat{z}$

$d = \sqrt{x^2+y^2} = y\sqrt{2}$ $\qquad dF_y \cong k\frac{\lambda dy}{D^2}\cdot Q\cdot 2$

$dM = Q\sqrt{2}\, y\, 2\frac{k\lambda}{D^2}\, dy$ $\qquad M = \int_0^L dM = \frac{k\sqrt{2}}{D^2}\lambda L^2 Q$

Calcolo dipolo (3° modo): approssimazione segmenti = punti



$q(\lambda) = L\lambda$ equivalenza: $\lambda L d = \lambda\frac{\sqrt{2}}{2}L^2$

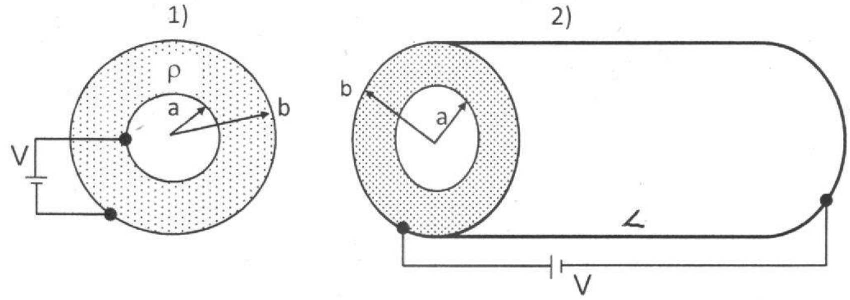
$\Rightarrow d^* = \frac{\sqrt{2}}{2}L$

Se metto le cariche al centro di L (è ragionevole)

$\Rightarrow d = \left[\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{4}\right]^{1/2} = \frac{L}{\sqrt{2}} = L\frac{\sqrt{2}}{2}$ O.K.

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Ad un cilindretto cavo di rame di raggio interno **a**, raggio esterno **b** e lunghezza **L** viena applicata una d.d.p. **V** in due condizioni differenti: 1) Fra la superficie interna e la superficie esterna. 2) Fra le due superfici di base (vedi figura). Il materiele del cilindretto ha una resistività ρ costante ed uniforme.
Calcolare le espressioni delle correnti I_1 ed I_2 che scorrono nel cilindretto nei due casi, a calcolare il rapporto I_1/I_2.
Dati: ***a = 2 cm ; b = 3 cm ; L = 30 cm .*** *Nota: Il disegno non è in scala.*



$$I_1 = \frac{V_0}{R_1} \; ; \quad I_2 = \frac{V_0}{R_2} \qquad R_2 = \frac{\rho L}{S} = \frac{\rho L}{\pi(b^2-a^2)} \quad [2]$$

$$R_1 = \int_a^b dR = \int_a^b \rho \frac{dz}{2\pi z \cdot L} = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{\rho}{2\pi L} \ln b/a \quad [3]$$

quindi 1) $I_1 = \frac{V_0}{\rho \ln b/a} 2\pi L$ [1] $\qquad I_2 = \frac{V_0}{\rho L}\pi(b^2-a^2)$ [1]

2) $$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cancel{V_0}\, 2\pi L}{\cancel{\rho} \ln b/a} \, \frac{\cancel{\rho} L}{\cancel{V_0}\pi(b^2-a^2)} = \frac{2L^2}{\ln\frac{b}{a}(b^2-a^2)} \quad [2]$$

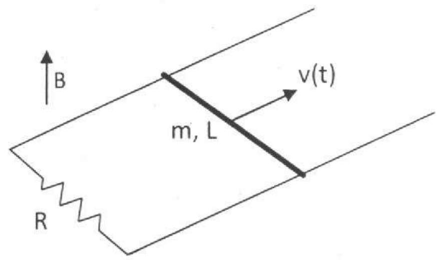
$$= \frac{2\cdot 9 \cdot 10^{-2}}{\underbrace{\ln 1,5}_{0,4}\underbrace{(9-4)}_{5}10^{-4}} = \frac{\cancel{2\cdot 10}\cdot 9\cdot 10^{-2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot 10^{-4}} = 9\times 10^2$$

[1]

Prova scritta di Fisica 2 6.7.2017

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Due guide conduttrici parallele di resistenza elettrica trascurabile sono collegate da un tratto di resistenza R. Su queste guide è poggiata una sbarretta conduttrice lunga L, di resistenza r<<R e massa m che si muove con velocità v(t) (vedi figura). Al tempo t=0 la sbarretta si muove con velocità v_0 ed a questo istante viene "acceso" istantaneamente un campo B costante ed uniforme perpendicolare al piano individuato dalle due guide. Calcolare l'espressione della velocità della sbarretta in funzione del tempo, e il tempo per cui la sua velocità si riduce a metà di quella iniziale.



$m = 10g$; $L = 10\,cm$; $B = 0{,}5\,T$; $R = 4\,\Omega$

Ai capi della sbarretta si genera una

$$|f.e.m| = \frac{d\phi(B)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[B \cdot L \cdot x(t)\right] = B L v(t) \quad \text{che}$$

farà circolare una corrente*) $i = f.e.m./R$

Sulla sbarretta agirà quindi una forza

$$\bar{F} = i\,\bar{L} \times \bar{B} = i L B\,(-\hat{v}) = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}(t)}{dt}$$

quindi $-\dfrac{B L v(t)}{R} L B = m \dfrac{dv(t)}{dt}$

$$\text{o: } -\frac{(BL)^2}{mR}\,dt = \frac{dv(t)}{v(t)} \qquad -\int_0^t \frac{dt}{\tau} = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv(t)}{v(t)} \qquad \text{essendo } \tau = \frac{mR}{(BL)^2}$$

$$\ln v(t)/v_0 = -t/\tau \qquad v(t) = v_0\,e^{-t/\tau} \;∴$$

$$v(t^*) = \frac{v_0}{2} \quad \text{per} \quad \frac{v_0}{2} = v_0\,e^{-t^*/\tau} \qquad \frac{1}{2} = e^{-t^*/\tau}$$

$$-\ln 2 = -\frac{t^*}{\tau} \qquad t^* = \tau \ln 2 = \frac{10^{-2} \cdot 4}{\left(\frac{1}{2}10^{-1}\right)^2} \times 0{,}7 = 0{,}7 \times 16 = 11{,}2\,s \;∴$$

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.

Valori che possono essere utili: ln 1,5 = 0,4 ; ln 2 = 0,7 ; ln 3 = 1,1 ; ln 5 = 1,6

Con la conservazione dell'Energia:

$$\mathcal{E}(t=0) = \mathcal{E}(t=t^*)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \mathcal{E}(\text{dissipata in } R) + \frac{1}{2} m v^{*2}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_0^{t^*} \frac{f^2}{R} dt + \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{4}$$

$$\int_0^{t^*} \frac{B^2 \ell^2 v(t)^2}{R} dt \qquad \underline{\text{serve } v(t) = v_0 e^{-t/\tau}} \quad . \ \tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$$

$$= \frac{B^2 \ell^2}{R} v_0^2 \int_0^t e^{-2t/\tau} dt = \frac{B^2 \ell^2 v_0^2}{R} \left(-\frac{\tau}{2}\right) \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^t$$

$$= -\cancel{\frac{B^2 \ell^2 v_0^2}{mR}} \frac{\cancel{\tau}}{2} m \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2} = \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2} \left[1 - e^{-\frac{2t^*}{\tau}} \right] + \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2} \frac{1}{4}$$

$$\cancel{1} = \cancel{1} - e^{-2t^*/\tau} + \frac{1}{4} \qquad -e^{-2t^*/\tau} + \frac{1}{4} = 0$$

$$1 = 4 e^{-2t^*/\tau} \qquad \ln 1 = -2\frac{t^*}{\tau} + \ln 4$$

$$t^* = \tau \frac{\ln 4}{2} = \tau \frac{\cancel{2} \ln 2}{\cancel{2}} = \tau \ln 2$$